合肥市 2021 年高三第三次教学质量检测

数学试题（理科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	C	A	A	C	D	C	D	B	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -1　　14. $y^2=8x$　　15. 12600　　16. ①②④

三、解答题：

17. (本小题满分 12 分)

解：(1)由 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)$ 得 $a=b(\sin C+\cos C)$.

由正弦定理得 $\sin A=\sin B(\sin C+\cos C)$，即 $\sin(B+C)=\sin B(\sin C+\cos C)$，

$\therefore \cos B\sin C=\sin B\sin C$.

$\because$ 在 ΔABC 中，$\sin C>0$，$\therefore \cos B=\sin B$，即 $\tan B=1$.

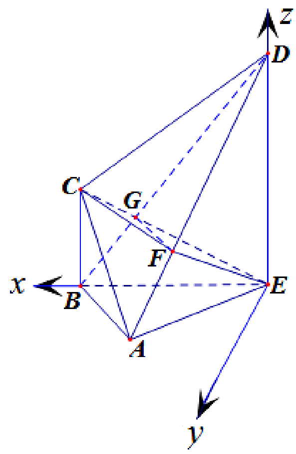
$\because B\in(0,\ \pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$. …………………………5 分

(2)由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\therefore b^2=a^2+c^2-\sqrt{2}ac$.

又 $\because b^2=\left(2-\sqrt{2}\right)ac$，$\therefore a^2+c^2=2ac$，即 $a=c$.

由(1)知 $B=\frac{\pi}{4}$，又 $\because c=2$，$\therefore \Delta ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. ………………12 分

18. (本小题满分 12 分)



(1) 证明：$\because DE\ /\!/\ BC$，$BC\perp$ 平面 ABE，$\therefore DE\perp$ 平面 ABE.

又 $\because AE\subset$ 平面 ABE，$\therefore DE\perp AE$.

在 $Rt\Delta ADE$ 中，由 $\angle DAE=60^\circ$，$DE=6$ 得，$AE=2\sqrt{3}$.

又 $\angle BAC=45^\circ, BC\perp AB, \therefore AB=BC=2$.

在 ΔABE 中，$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos\angle ABE$，解得 $BE=4$.

$\therefore BE^2=AB^2+AE^2$，即 $AB\perp AE$.

而 $BC\perp AE$，$\therefore AE\perp$ 平面 ABC.

又 $\because AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore AE\perp AC$ …………………………5 分

(2) 解：连接 BD 交 CE 于点 G，连接 FG.

$\because AB\ /\!/$ 平面 CEF，平面 $ABD\cap$ 平面 $CEF=FG$，

$\therefore AB\ /\!/\ FG$，$\therefore \frac{AF}{FD}=\frac{BG}{GD}$.

在直角梯形 $BCDE$ 中，$\Delta BCG\sim\Delta DEG$，$\therefore \frac{BG}{GD}=\frac{BC}{DE}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{AF}{FD}=\frac{1}{3}$.

如图，以 E 为坐标原点，EB，ED 所在的直线分别为 x 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则 $E(0,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 6)$，$C(4,\ 0,\ 2)$.

又 $\because A(3,\sqrt{3},0)$，$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{2}\right)$，$\therefore F\left(\frac{9}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{CF}=\left(-\frac{7}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DC}=(4,0,-4)$.

令平面CDF 的一个法向量为$\overrightarrow{m}=(x,\ y,\ z)$，由$\begin{cases}\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{m}=0,\\ \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{m}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-7x+3\sqrt{3}y-2z=0,\\ x-z=0.\end{cases}$

取$x=1$，得$\overrightarrow{m}=(1,\sqrt{3},1)$.

同理，平面CEF 的一个法向量为$\overrightarrow{n}=(3,\sqrt{3},-6)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=0$，即二面角$D-CF-E$ 的大小为$\dfrac{\pi}{2}$. …………………………12 分

19.(本小题满分 12 分)

解：(1) A 系统需要维修的概率为$C_3^1\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}$，

B 系统需要维修的概率为$C_5^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+C_5^1\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{2}$，

设X 为该电子产品需要维修的系统个数，则$X\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，$\xi=200X$.

$P(\xi=200k)=P(X=k)=C_2^k\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-k}\ (k=0,1,2)$,

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	0	200	400
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

$\therefore E\xi=200\times2\times\dfrac{1}{2}=200$. …………………………6 分

(2) A 系统 3 个元件至少有 2 个正常工作的概率为$P_A=C_3^2p^2(1-p)+p^3=-2p^3+3p^2$，$B$ 系统 5 个元件至少有 3 个正常工作的概率为$P_B=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+p^5=6p^5-15p^4+10p^3$，则

$f(p)=P_B-P_A=6p^5-15p^4+12p^3-3p^2=3p^2(p-1)^2(2p-1)$.

$\because 0<p<1$.令$f(p)>0$，解得$\dfrac{1}{2}<p<1$.

所以，当$\dfrac{1}{2}<p<1$时，B 系统比A 系统正常工作的概率大，当该产品出现故障时，优先检测A 系统;

当$0<p<\dfrac{1}{2}$时，A 系统比B 系统正常工作的概率大，当该产品出现故障时，优先检测B 系统;

当$p=\dfrac{1}{2}$时，A 系统与B 系统正常工作的概率相等，当该产品出现故障时，A，B 系统检测不分次序.

………………………12 分

20.(本小题满分 12 分)

解：(1) $f(x)=2\ln x-a(x-1)$，则$f'(x)=\dfrac{2}{x}-a=\dfrac{2-ax}{x}$.

①当$a\le0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

$\because f(1)=0$，$\therefore$当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，不符合题意，舍去;

②当$0<a<2$时，$\dfrac{2}{a}>1$，由$f'(x)>0$得，$0<x<\dfrac{2}{a}$，由$f'(x)<0$得，$x>\dfrac{2}{a}$.

$\therefore f(x)$在$\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{2}{a},+\infty\right)$上单调递减.

$\because f(1)=0$，$\therefore$当$x\in\left(1,\dfrac{2}{a}\right)$时，$f(x)>f(1)=0$，不符合题意，舍去;

③当$a=2$时，$\dfrac{2}{a}=1$，由$f'(x)>0$得，$0<x<1$；由$f'(x)<0$得，$x>1$.

∴$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

又∵$f(1)=0$，∴$f(x)\le 0$成立.

④当$a>2$时，$\dfrac{2}{a}<1$，由$f'(x)>0$得，$0<x<\dfrac{2}{a}$，由$f'(x)<0$得，$x>\dfrac{2}{a}$.

∴$f(x)$在$\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{2}{a},+\infty\right)$上单调递减.

∵$f(1)=0$，∴当$x\in\left(\dfrac{2}{a},1\right)$时，$f(x)>f(1)=0$，不符合题意，舍去;

综上得，$a=2$.　　　　　　　　　　　…………………………6分

(2) 由(1)知，当$a=2$时，$f(x)<0$在$(1,+\infty)$上成立，即$\ln x<x-1$.

令$x=1+\dfrac{k}{(n+1)^2}$($k=1,2,\cdots,n$)，则$\ln\left[1+\dfrac{k}{(n+1)^2}\right]<\dfrac{k}{(n+1)^2}$，

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\ln\left[1+\frac{k}{(n+1)^2}\right]=\ln\left\{\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]\cdot\left[1+\frac{2}{(n+1)^2}\right]\cdot\cdots\cdot\left[1+\frac{n}{(n+1)^2}\right]\right\}$$

$$<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)^2}=\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}<\frac{1}{2},$$

即$\ln\left\{\dfrac{\left[1+(n+1)^2\right]\cdot\left[2+(n+1)^2\right]\cdots\left[n+(n+1)^2\right]}{(n+1)^{2n}}\right\}<\dfrac{1}{2}$，

∴$\dfrac{\left[1+(n+1)^2\right]\left[2+(n+1)^2\right]\cdots\left[n+(n+1)^2\right]}{(n+1)^{2n}}<\sqrt{e}$ ($n\in N^*$).　　…………………………12分

21.(本小题满分12分)

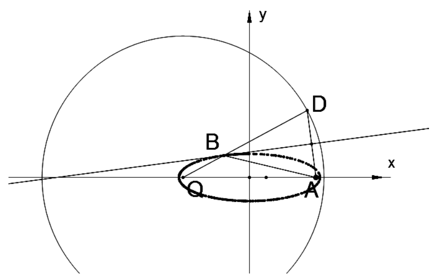
解：(1)由题意知$BQ+BA=BQ+BD=DQ=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$，且$6\sqrt{2}>AQ=8$，

根据椭圆的定义得，交点B的轨迹是一个以A，Q为焦点的椭圆，

$2a=6\sqrt{2}$，$2c=8$，

∴$b^2=a^2-c^2=18-16=2$，

∴曲线C的方程为$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　　…………………………4分



(2)由曲线T与曲线C相似，且它们的焦点在同一条直线上，曲线T经过点$E(-3,0)$，$F(3,0)$，可设曲线T的方程为$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=\lambda$ ($\lambda>0$).将点$F(3,0)$坐标代入上式得，$\lambda=\dfrac{1}{2}$，

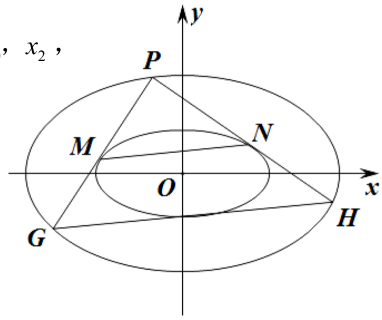
∴曲线T的方程为$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$.

设$P(x_0, y_0)$，$M(x_1, y_1)$，$G(x_2, y_2)$.

①当切线PG的斜率不存在时，切线PG的方程为：$x=\pm3$，代入$\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{2}=1$得$y=\pm1$，此时$PH$与曲线$T$相切，$M$为$PG$的中点，$N$为$PH$的中点，$\dfrac{|MN|}{|GH|}=\dfrac{1}{2}$是一个定值;

同理可求，当切线PH的斜率不存在时，$\dfrac{|MN|}{|GH|}=\dfrac{1}{2}$也是一个定值.

②当切线PG和PH的斜率都存在时，设切线PG的方程为：$y=kx+m$，分别代入$\frac{x^2}{9}+y^2=1$和$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{2}=1$，化简整理得$\left(9k^2+1\right)x^2+18kmx+9m^2-9=0$ ①，$\left(9k^2+1\right)x^2+18kmx+9m^2-18=0$ ②.



由题意知，方程①有两个相等的实数根x_1；方程②有两个不相等的实数根x_0，x_2，

$\therefore x_1+x_1=x_0+x_2=-\frac{18km}{9k^2+1}$，$\therefore x_0+x_2=2x_1$，

$\therefore y_0+y_2=k\left(x_0+x_2\right)+2m=2kx_1+2m=2y_1$，

此时，M为PG的中点.

同理可证，N为PH的中点，$\frac{|MN|}{|GH|}=\frac{1}{2}$是一个定值.

综上可知，$\frac{|MN|}{|GH|}=\frac{1}{2}$是一个定值. …………………………12分

22.（本小题满分10分）

(1)直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）. 由$\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$得，$\rho^2\cos^2\theta=4\rho\sin\theta$，

∴曲线C的直角坐标方程为$x^2=4y$. ……………………………5分

(2)将直线l的参数方程$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$代入$x^2=4y$，并整理得$t^2\cdot\cos^2\alpha+\left(2\cos\alpha-4\sin\alpha\right)t-7=0$.

设点P,Q对应的参数分别为t_1,t_2，

由线段PQ的中点为M得$t_1+t_2=0$，即$-\frac{2\cos\alpha-4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0$，

∴直线l的斜率$k=\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

∴直线l的方程为$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，即$x-2y+3=0$. ……………………………………10分

23.（本小题满分10分）

解：(1)当$a=2$时，$f\left(x\right)=|x+2|+2|x-1|$.

当$x\le-2$时，$f\left(x\right)=-x-2-2x+2\le4$，解得$x\ge-\frac{4}{3}$，结合$x\le-2$得，解集为$\varnothing$；

当$-2<x\le1$时，$f\left(x\right)=x+2-2x+2\le4$，解得$x\ge0$，结合$-2<x\le1$得，$0\le x\le1$；

当$x>1$时，$f\left(x\right)=x+2+2x-2\le4$，解得$x\le\frac{4}{3}$，结合$x>1$得，$1<x\le\frac{4}{3}$.

∴原不等式的解集为$\left[0,\ \frac{4}{3}\right]$. …………………………5分

(2)当$1\le x\le2$时，$|x+a|+2|x-1|>x^2$可化为$|x+a|>x^2-2x+2$，

$\therefore x+a>x^2-2x+2$或$x+a<-x^2+2x-2$，

即存在$x\in[1,\ 2]$，使得$a>x^2-3x+2$，或$a<-x^2+x-2$.

$\therefore a>-\frac{1}{4}$，或$a<-2$，

∴实数a的取值范围为$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$. …………………………10分